

Classes :7D

Exercices de révision pour le Bac blanc
Nombres complexes et suites numériques

12/2019

Dans les **exercices 1 à 4**, pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple.

EXERCICE 1

Soit z un nombre complexe non nul.

1. Si $ z = 1$, alors $z^2 = (\bar{z})^2$.	4. Si $\arg(iz) = \pi$, alors z est imaginaire pur.
2. Si $z = -2ie^{i\frac{\pi}{3}}$, alors $\arg z = \pi + \frac{\pi}{3}$.	5. Si $z = 5 + i(4 - 3i)$, alors la partie imaginaire de z est $4i$
3. Si $z = 3(\sin \theta - i \cos \theta)$, alors $z = 3e^{i\theta}$	6. Si $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = i e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_3 = \sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{2}}$, alors le produit $z_1 z_2 z_3$ est réel négatif.

EXERCICE 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

On définit les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

1. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.	3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.
2. La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.	4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite finie.

EXERCICE 3

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q \in]0 ; +\infty [$.

On note $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

1. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2000$, alors $q > 1$.	4. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$, alors $q = \frac{1}{2}$.
2. Si $q < 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < 2$.	5. Si $q = 2$, alors $S_4 = 15$.
3. Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.	6. Si $q = 0,5$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$.

EXERCICE 4

On considère une suite (u_n) , définie sur \mathbb{N} , croissante et de termes strictement positifs.

On définit alors la suite (v_n) sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{-1}{u_n}$.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors (v_n) est convergente.	5. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) est divergente.	6. La suite (v_n) est croissante et négative.
3. Si (u_n) est minorée par 5, alors (v_n) est minorée par -1.	7. Si (u_n) est arithmétique, alors (v_n) est arithmétique.
4. Si (u_n) est géométrique, alors (v_n) est géométrique.	8. La suite (u_n) est minorée.

EXERCICE 5

1) On considère les équations suivantes dans \mathbb{C} :

$$E_1 : z^2 - 6z + 25 = 0$$

$$E_2 : z^2 - 8z + 25 = 0$$

a) Résoudre E_1 . On note z_1 et z_2 ses solutions avec $\text{Im}(z_1) > 0$.

b) Résoudre E_2 . On note z_3 et z_4 ses solutions avec $\text{Im}(z_3) > 0$.

c) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres $z_1 + z_3$ et $z_1 \times z_3$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 3 + 4i$ on pose : $f(z) = \frac{z - 4 - 3i}{z - 3 - 4i}$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 3 + 4i$, $z_B = 4 + 3i$ et $z_C = 4 + 4i$.

a) Placer les points A , B et C dans le repère.

b) Calculer et mettre sous forme algébrique le nombre complexe $f(4 + 4i)$. Interpréter graphiquement.

c) Déterminer et représenter, dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les ensembles de points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$.

Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

EXERCICE 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose :

$$P(z) = z^3 - (4 + 8i)z^2 + (-14 + 24i)z + 32 + 4i.$$

1) Calculer $P(2i)$ et déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a :

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b).$$

2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$. On note z_1, z_2 et z_3 ses solutions avec $|z_1| < |z_2| < |z_3|$.

3) Soit A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 . Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - (4 - 2i)z^2 + (4 - 6i)z - 4 + 8i$.

a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de \mathbb{C} :

$$P(z) = (z + 2i)(z^2 + az + b)$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. Soient A , B et C les images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$.

a) Placer les points A , B et C .

b) Calculer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\frac{z - 1 - i}{z + 2i}$ soit imaginaire pur.

3) Pour tout entier naturel n , on pose $z_n = (z_A)^n$ et soit M_n le point d'affixe z_n .

a) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels le point M_n appartient à l'axe des abscisses.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $OM_n \geq 2020$.

EXERCICE 8

Dans l'ensemble \mathbb{C} on pose : $P(z) = \frac{z-1+6i}{z+4-i}$.

1) Calculer puis écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants:

$P(-1)$; $P(3+6i)$; $P(-4+3i)$.

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $P(z) = 1-i$; écrire la solution sous forme algébrique .

3) On pose $Z = P(3+6i)$. On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit M_1 ; M_n les points d'affixes respectives Z et Z^n ; $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $Z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

b) Ecrire Z^n sous forme trigonométrique.

c) Déterminer et représenter dans le plan les points M_1 ; M_2 ; M_3 .

4) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle isocèle en M_1 .

5.a) Pour quelles valeurs de n ; le point M_n est situé sur l'axe Ox ?

b) Montrer que les points O ; M_4 ; M_{2020} sont alignés.

6) On pose $U_n = |z_{n+1} - z_n|$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.

7) On pose $S_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n+1}$. Calculer S_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

8) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) Γ_1 $|P(z)| = 1$.

b) Γ_2 Le nombre $P(z)$ est réel.

EXERCICE 9

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $U_n = \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}$.

1.a) Calculer U_1 , U_2 et U_3 .

b) Justifier que la suite (U_n) :

1) N'est pas arithmétique ;

2) N'est pas géométrique ;

3) Est convergente.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $V_n = \frac{n^2 - 1}{n}$.

a) Montrer que : $U_n = V_{n+1} - V_n$

b) En déduire l'expression de la somme $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n .

EXERCICE 10

On considère les suites numériques (U_n) et (V_n) définies pour tout n de \mathbb{N}^* par:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{5n} U_n \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n} U_n.$$

1.a) Calculer U_2 , U_3 , V_1 , V_2

b) Montrer que (U_n) est positive.

c) Montrer que (U_n) est décroissante et bornée. Que peut-on déduire ?

2.a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique convergente.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n . Recalculer alors U_2 et U_3 .

3.a) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = \frac{U_1}{1} + \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} + \dots + \frac{U_n}{n}$.

- b) Soit $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times \dots \times V_n$. Montrer que $P_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$
- c) Soit $Q_n = U_1 \times U_2 \times U_3 \times \dots \times U_n$. Calculer Q_n en fonction de n .

EXERCICE 11

On considère la suite numérique (U_n) définie par tout n de \mathbb{N}^* par:
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$$

1.a) Calculer U_1, U_2 .

b) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout n , $0 \leq U_n < 2$

2) On considère la suite (V_n) définie pour tout n par $V_n = 2 - U_n$

a) Montrer que, pour tout entier n , $0 < \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$. En déduire le sens de variation de (V_n) puis celui de (U_n) .

b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence montrer que $0 < V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c) En déduire la limite de la suite (V_n) puis celle de la suite (U_n) .

EXERCICE 12

On considère la suite numérique (U_n) définie par:
$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = 3 - \frac{2n}{3(n+1)}(3 - U_n), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) Vérifier que $U_2 = \frac{7}{3}$ puis calculer U_3 ; U_4 .

2) On admet que la suite (U_n) est majorée par 3 (à démontrer facilement par récurrence).

a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* on a: $U_{n+1} - U_n = \frac{n+3}{3(n+1)}(3 - U_n)$.

b) Déduire le sens de variation de la suite (U_n) . Puis que la suite (U_n) est convergente.

3) On pose pour tout n de \mathbb{N}^* : $V_n = n(3 - U_n)$.

a) Calculer $V_1; V_2$ et montrer que (V_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

c) Montrer que la suite (V_n) est convergente et calculer sa limite. En déduire la limite de (U_n) .

d) Calculer par une deuxième méthode la limite de (U_n) .

4) Calculer en fonction de n la somme: $S_n = U_1 + 2U_2 + 3U_3 + \dots + nU_n$.

EXERCICE 13

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$; $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.

3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante.

5. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n .

EXERCICE 14

On définit la suite numérique de terme général: $U_n = \frac{n}{e^{n-1}}$; pour tout entier naturel $n \geq 1$

1. Calculer U_1 et U_2 .

2. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et positive puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3. Démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_{n+1} = \frac{1}{e} U_n + \frac{1}{e^n}$ (*).

4. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose: $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$.

a) En utilisant l'égalité (*) démontrer que: $S_n = \frac{-1}{e-1} U_n + \frac{e^2}{(e-1)^2} (1 - \frac{1}{e^n})$.

b) Dédurre de ce qui précède que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e^2}{(e-1)^2}$.

EXERCICE 15

1) On pose pour tout nombre complexe $z \neq -6$, $f(z) = \frac{8z+3}{z+6}$.

a) Donner la forme algébrique des nombres : $z_1 = f(2i)$, $z_2 = f(3-2i)$, $z_3 = f(\frac{1}{2})$

b) Résoudre l'équation $f(z) = z$

2) On donne la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{8u_n + 3}{u_n + 6}$.

a) Calculer les valeurs exactes des termes u_1, u_2 et u_3 .

b) Montrer par récurrence que pour tout entier n non nul, $1 < u_n < 3$.

c) Montrer que (u_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

3) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite (v_n) par : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont précisera la raison et le premier terme v_0 .

b) Exprimer v_n en fonction de n .

c) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n .

d) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 16

On considère la suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $z_0 = i$ et, pour tout entier n , $z_{n+1} = \frac{1-i}{2} z_n$.

Pour n entier naturel, on appelle M_n le point d'affixe z_n .

1) Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 .

2) Montrer que pour tout n entier naturel, $z_n = \frac{ie^{-i\frac{n\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$.

3) En déduire que la suite $V_n = |z_n|$ est une suite géométrique. Donner son terme général et sa limite.

4) Montrer que quel que soit n entier naturel, les triangles $OM_n M_{n+1}$ sont rectangles.